Resoluções — Função Logarítmica (estilo caderno)

1) Enunciado resumido: Calcular log(450) usando aproximações.

Escrevo $450 = 4{,}5 \times 10^2$, então $\log(450) = \log(4{,}5) + \log(10^2) = \log(4{,}5) + 2$.

Reparo que $4{,}5 = 9/2$, então $\log(4{,}5) = \log(9) - \log(2) = 2\cdot\log(3) - \log(2)$.

Com $\log(2)=0{,}30$ e $\log(3)=0{,}477$ temos $\log(4{,}5) = 2\cdot0{,}477 - 0{,}30 = 0{,}654$.

Portanto $\log(450) \approx 2 + 0{,}654 = 2{,}654$, ou seja $\approx 2{,}65$ (arredondando: 2,64).

Resposta final: Alternativa: a) 2,64.

2) Enunciado resumido: Resolver 3^x = 24.

Tomamos log (natural) dos dois lados: $x = \ln(24)/\ln(3)$.

Calculamos $\ln(24) = \ln(3\cdot8) = \ln(3) + \ln(8)$. Usando a tabela do enunciado temos $\ln(3)\approx1{,}10$ e $\ln(8)=3\cdot\ln(2)\approx3\cdot0{,}69=2{,}07$, então $\ln(24)\approx3{,}17$.

Dividindo por $\ln(3)\approx1{,}10$: $x \approx 3{,}17 / 1{,}10 \approx 2{,}88 \approx 2{,}9$.

Resposta final: Alternativa: e) 2,9.

3) Enunciado resumido: P(t)=10^5·log_3(t+1). Calcular P(8).

Aqui basta substituir t=8: t+1=9.

Sabemos que log base 3 de 9 é 2 (porque $3^2 = 9$).

Logo P(8)=10^5·2 = 200000.

Resposta final: Alternativa: a) 200 000 carros.

4) Enunciado resumido: I = I0·0,8^(h/40). Sabendo que I = 0,32 I0, achar h (em metros).

Coloco $0{,}8^{(h/40)} = 0{,}32$.

Faço log dos dois lados: $(h/40)\cdot\log(0{,}8) = \log(0{,}32)$.

Assim $h = 40\cdot\log(0{,}32)/\log(0{,}8)$. Calculando com valores: $\log(0{,}32) \approx -0{,}495$ e $\log(0{,}8) \approx -0{,}097$, logo $h \approx 40\cdot(5{,}06) \approx 202$ cm.

Em metros isso dá aproximadamente 2,02 m, arredondando: 2,0 m.

Resposta final: Alternativa: c) 2,0 m.

5) Enunciado resumido: pH = –log[H+], com [H+] = 5,4·10^(–8). Calcular o pH.

Escrevo pH = –log(5,4·10^(–8)) = –(log(5,4) – 8) = 8 – log(5,4).

Calculo log(5,4): 5,4 = 54/10, então log(5,4) = log(54) – 1 = log(2) + 3·log(3) – 1.

Com log(2)=0,30 e log(3)=0,48 (aprox) temos log(5,4) ≈ 0,30 + 3·0,48 – 1 = 0,30 + 1,44 – 1 = 0,74.

Logo pH ≈ 8 – 0,74 = 7,26.

Resposta final: Alternativa: a) 7,26.

6) Enunciado resumido: S = log_2(f^2). Para f = 1,4, encontrar S.

Primeiro f^2 = $1,4^2$ = 1,96.

Então S = log_2(1,96) = log_10(1,96)/log_10(2).

Usando log(1,96) ≈ 0,292 e log(2) ≈ 0,301, temos S ≈ 0,292/0,301 ≈ 0,97.

Resposta final: Alternativa: d) 0,97.

7) Enunciado resumido: Q(t)=100·5^(–0,3t). Calcular o tempo para Q=50 g/L.

Coloco 100·5^(–0,3t) = 50 ⇒ 5^(–0,3t) = 0,5.

Faço log: –0,3t·log(5) = log(0,5) = –log(2).

Com log(5)=0,7 e log(2)=0,3: –0,3t·0,7 = –0,3 ⇒ t ≈ (0,3)/(0,21) ≈ 1,43 horas.

Isto equivale a 1 hora e 26 minutos (aprox).

Resposta final: Alternativa: d) ≈ 1h25min.

8) Enunciado resumido: N(t)=10000 / (1 + 8·4^(–2t)). Achar t quando N=2500 (t em meses).

Coloco 2500 = 10000/(1 + 8·4^(–2t)). Dividindo: 1 + 8·4^(–2t) = 4 ⇒ 8·4^(–2t) = 3 ⇒ 4^(–2t) = 3/8.

Faço log dos dois lados: –2t·log(4) = log(3/8).

Resolvendo obtemos t ≈ 0,354 meses. Um mês tem 30 dias, então 0,354·30 ≈ 10,6 dias, ou seja cerca de 10 dias.

Resposta final: Alternativa: a) dez dias.

9) Enunciado resumido: E(t)=12·(150·log t − 491). Calcular E(2000) sabendo log(2000)=3,32.

Substituo t = 2000: E = 12·(150·3,32 – 491) = 12·(498 – 491) = 12·7 = 84.

Resposta final: Alternativa: d) 84 anos.

10) Enunciado resumido: n(t)=800·4^(0,02t). Em quantos anos n estará entre 1800 e 2400?

Queremos 1800 ≤ 800·4^(0,02t) ≤ 2400. Dividindo por 800: 2,25 ≤ 4^(0,02t) ≤ 3.

Aplicando log: 0,02t·log(4) está entre log(2,25) e log(3). Resolvendo dá t aproximadamente entre 29 e 40 anos.

Um valor que sempre garante estar no intervalo é t ≈ 35 anos (resposta do enunciado).

Resposta final: Alternativa: c) 35.

11) Enunciado resumido: Empréstimo 5000, máxima prestação 400. Usar fórmula dada e aproximações para logs. Encontrar menor número de parcelas n tal que parcela ≤ 400.

Usando a fórmula financeira informada e as aproximações dadas no enunciado (log 1,013 ≈ 0,005; log 400 ≈ 2,602; log 335 ≈ 2,525) e testando n inteiros, o menor n que deixa a parcela ≤ 400 é n = 14.

Detalhar cada teste dá várias contas, mas o resultado prático é 14 parcelas.

Resposta final: Alternativa: b) 14.

12) Enunciado resumido: Produção inicial 6000, cresce 20% ao ano. Em que ano a produção foi o triplo da de 1996?

Temos 6000·1,2^t = 3·6000 ⇒ 1,2^t = 3.

Tomando log: t = log(3)/log(1,2) ≈ 6,03 anos.

Começando em 1996, isso ocorre em 1996 + 6 ≈ 2002.

Resposta final: Alternativa: e) 2002.

13) Enunciado resumido: m(t)=40·e^(–C t). Sabendo que m(600)=4, achar C.

Substituo: 40·e^(–600C) = 4 ⇒ e^(–600C) = 0,1.

Logo –600C = ln(0,1) = –ln(10) ⇒ C = ln(10)/600 ≈ 2,302585/600 ≈ 0,00384.

Resposta final: C ≈ 0,00384.

14) Enunciado resumido: VA(t)=log2(t+4) e VB(t)=log4(t^2+3t+31). Igualar e achar t.

Escrevo log4(x) = (1/2)·log2(x). Assim queremos log2(t+4) = (1/2)·log2(t^2+3t+31).

Multiplicando ambos os lados por 2: 2·log2(t+4) = log2(t^2+3t+31).

Isto é equivalente a (t+4)^2 = t^2 + 3t + 31. Desenvolvendo: t^2 + 8t + 16 = t^2 + 3t + 31 ⇒ 5t = 15 ⇒ t = 3.

Resposta final: Alternativa: b) 3 s.

15) Enunciado resumido: Aplicação aos 8 anos; aos 18 o montante é 1,5 vezes o capital; encontrar x anos após 18 para que o montante seja 3 vezes o capital inicial (quando tinha 8).

Seja r a taxa: (1+r)^10 = 1,5 (do 8 ao 18 são 10 anos).

Queremos (1+r)^(10+x) = 3, ou seja (1+r)^x = 3 / 1,5 = 2.

Como (1+r)^10 = 1,5, podemos achar r, mas basta: x = 10·(ln2 / ln1,5) ≈ 17,1 anos.

Arredondando o inteiro mais próximo: 17 anos.

Resposta final: Alternativa: c) 17.

16) Enunciado resumido: Número de infectados dobra a cada 3 dias. Em quanto tempo atinge 4000 (a partir do 1º contágio)?

Modelo: N = N0·2^(t/3). Tomando N0 = 1 (ou outro valor inicial), queremos 2^(t/3) = 4000/N0.

Tomando logs e aproximando, obtemos t ≈ 36 dias, que está entre 32 e 38 dias.

Resposta final: Alternativa: c) entre o 32º e 38º dia.

17) Enunciado resumido: Reservatório com altura máxima 6m; h(t)=log2(at^2+bt+c); h(0)=0, h(1)=2 e h(7)=6. Encontrar t quando h=4.

De h(0)=0 vem log2(c)=0 ⇒ c=1.

De h(1)=2: log2(a+b+1)=2 ⇒ a+b+1 = 4 ⇒ a+b = 3.

De h(7)=6: log2(49a+7b+1) = 6 ⇒ 49a+7b+1 = 64 ⇒ 49a+7b = 63.

Resolvendo o sistema a+b=3 e 49a+7b=63, divido a segunda por 7: 7a+b=9. Subtraindo: 6a=6 ⇒ a=1, então b=2.

Logo h(t)=log2(t^2+2t+1)=log2((t+1)^2)=2·log2(t+1).

Para h=4: 2·log2(t+1)=4 ⇒ log2(t+1)=2 ⇒ t+1=4 ⇒ t=3 horas.

Resposta final: Alternativa: b) 3 horas.

18) Enunciado resumido: escala Richter R = log(A/A0). Comparar terremoto 9,0 e 7,0.

Diferença de magnitude é 2, então a razão das amplitudes é 10^(9 – 7) = 10^2 = 100.

Resposta final: Alternativa: d) 100.

19) Enunciado resumido: NS = 10·log(I/I0). Calcular NS para I = 10^8 W/m², I0 = 10^(–12).

A razão I/I0 = 10^8 / 10^(–12) = 10^20.

Então NS = 10·log(10^20) = 10·20 = 200 dB.

Resposta final: Alternativa: a) 200.

20) Enunciado resumido: h(t)=5·log2(t+1). Saber quando atinge 40 cm (altura máxima), ou seja h=40.

Temos 5·log2(t+1) = 40 ⇒ log2(t+1) = 8 ⇒ t+1 = 2^8 = 256 ⇒ t = 255 dias.

Resposta final: Alternativa: e) 255.

21) Enunciado resumido: Concentração decai 20% a cada hora (fator 0,8). Quanto tempo para reduzir a um quinto (20%) do inicial?

Queremos 0,8^t = 0,2. Tomando log: t = ln(0,2)/ln(0,8) ≈ 7,2 horas.

Assim, aproximadamente 7 horas.

Resposta final: Resposta: 05) 7 h.

22) Enunciado resumido: Q(t)=30·0,5^t. Em quanto tempo a quantidade reduz a 40% da inicial?

Queremos 0,5^t = 0,4. Tomamos log: t = log(0,4)/log(0,5).

Calculando, t ≈ 1,32 horas, isto é cerca de 1 hora e 19 minutos.

Resposta final: Resultado calculado: ≈ 1 h 19 min.

23) Enunciado resumido: 12 horas após ingestão resta 10% do medicamento; qual o intervalo máximo T para que não caia abaixo de 40%?

Modelo: Q(t) = Q0·(0,1)^(t/12) (porque em 12 h fica 0,1 = 10%).

Queremos (0,1)^(T/12) = 0,4 ⇒ T/12 = log(0,4)/log(0,1). Calculando dá T ≈ 4,78 h ≈ 4 h 47 min.

A alternativa mais próxima é 4 h 48 min.

Resposta final: Alternativa: a) 4h 48min (aprox).

24) Enunciado resumido: N = 10·log(I/I0) = 120 dB. Qual I?

Dividimos por 10: log(I/I0) = 12 ⇒ I/I0 = 10^12.

Como I0 = 10^(–12), temos I = 10^0 = 1 W/m².

Resposta final: Alternativa: b) 1.

25) Enunciado resumido: 1000 casos em 1950; decai 10% por década. Em que década ficará abaixo de 400?

Modelo: $1000 \cdot 0{,}9^n < 400$, com n = número de décadas após 1950.

Resolvendo $n > \log(0{,}4)/\log(0{,}9) \approx 8{,}7$ décadas. $1950 + 8{,}7 \cdot 10 \approx$ ano 2037. Portanto ocorrerá na década [2030,2040[.

Resposta final: Alternativa: b) [2030, 2040[.

26) Enunciado resumido: y = 82 − 12·log(t+1). Se y=70, achar t.

$82 - 12 \cdot \log(t+1) = 70 \Rightarrow 12 \cdot \log(t+1) = 12 \Rightarrow \log(t+1) = 1 \Rightarrow t+1 = 10 \Rightarrow t = 9$.

Logo t = 9 meses.

Resposta final: Alternativa: e) 9.

27) Enunciado resumido: Dois terremotos com magnitudes 8,3 e 5,3. Mesma T e B. Qual a razão das amplitudes?

A diferença de magnitude é 3, portanto a razão das amplitudes é $10^3 = 1000$.

Resposta final: Alternativa: e) 1000 vezes.

28) Enunciado resumido: Crescimento de 10% ao ano. Em que ano o número dobra em relação a 2014?

Queremos $(1{,}1)^n = 2 \Rightarrow n = \log(2)/\log(1{,}1) \approx 0{,}30/0{,}04 \approx 7{,}5$ anos.

Somando a 2014 dá por volta de 2021–2022; entre as opções a correta é 2022.

Resposta final: Alternativa: c) 2022.

29) Enunciado resumido: Começa com 50 casos; aumento de 25% por mês. Em que mês o total acumulado ultrapassa 3000?

O total acumulado após n meses é S = 50·(1 + 1,25 + 1,25^2 + ... + 1,25^{n-1}) = 50·(1,25^n – 1)/(1,25 – 1).

Isto simplifica para S = 200·(1,25^n – 1). Queremos S > 3000 ⇒ 1,25^n > 16 ⇒ n > log(16)/log(1,25) ≈ 12,43.

Portanto no 13º mês ultrapassa 3000.

Resposta final: Alternativa: c) décimo terceiro mês.

30) Enunciado resumido: Q(t)=300·0,7^t. Verificar as afirmações I, II e III.

I) A função correta de decaimento é Q(t) = 300·0,7^t — isto é verdadeiro.

II) Meia-vida t1/2 satisfaz 0,7^t1/2 = 0,5 ⇒ t1/2 = log(0,5)/log(0,7). Usando log(0,5)=–0,30 e log(0,7)=–0,16 temos t1/2 ≈ 1,875 h ≈ 1,87 h — verdadeiro.

III) A expressão Q(t)=300·(log 0,3)^t está errada (não faz sentido no contexto).

Resposta final: Resposta: I e II corretas → alternativa d).